Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2018

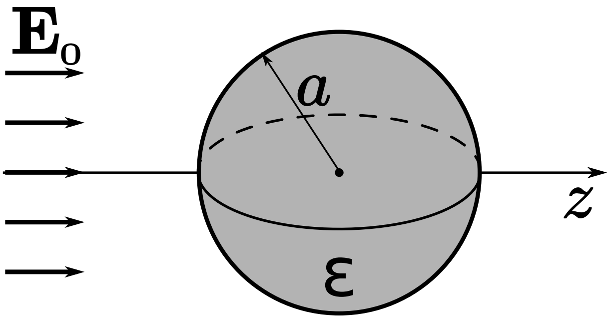
Eletrodinâmica Clássica

12/03/2018 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Eletrostática

Uma esfera de raio a e constante dielétrica ε é posicionada em um campo elétrico inicialmente uniforme $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{z}$, como indicado na figura. Não há carga livre, nem dentro nem fora da esfera.



(a) (50%) Usando as condições de contorno apropriadas, determine o potencial elétrico no interior e no exterior da esfera.

(b) (30%) Determine o campo elétrico e a polarização no interior da esfera.

(c) (20%) Esboce as linhas de campo em todo o espaço, indicando a distribuição de cargas na esfera.

Dados:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

$$\int_{-1}^{1} du\, P_\ell(u) P_n(u) = \frac{2\delta_{\ell n}}{2\ell+1}$$

$$P_0(u) = 1, \qquad P_1(u) = u, \qquad P_2(u) = \frac{3u^2-1}{2}, \qquad P_3(u) = \frac{5u^3-3u}{2}$$

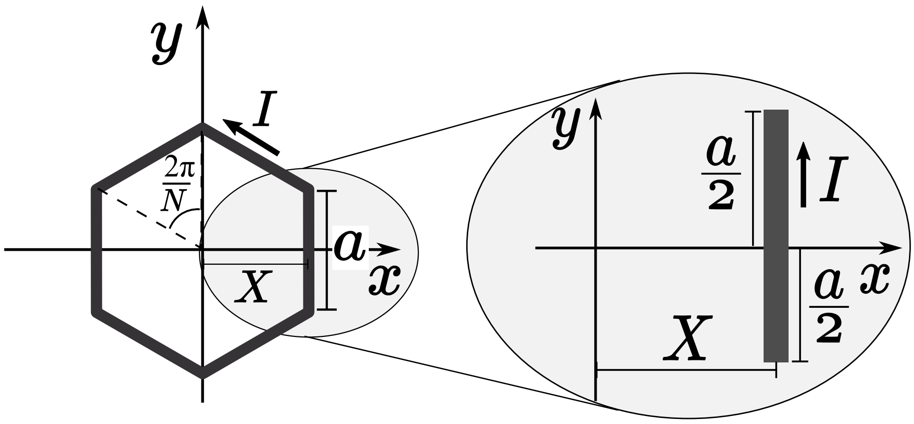
$$(1-u^2)\frac{dP_\ell}{du} = \ell\,[P_{\ell-1}(u) - u\,P_\ell(u)] = \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}\,[P_{\ell-1}(u) - P_{\ell+1}(u)]$$

Questão 2: Magnetostática

(a) (30%) Calcule o campo magnético produzido por uma espira condutora circular de raio R transportando corrente elétrica I, ao longo de seu eixo (z) de simetria.

Considere agora uma espira condutora com a forma de um polígono regular de N lados, cada um de comprimento a, com eixo de simetria sendo o eixo z, como mostrado na figura para o caso em que $N = 6$. O campo magnético $\mathbf{H}$ produzido pela espira quando esta transporta uma corrente I pode ser calculado pela superposição dos campos magnéticos produzidos por cada segmento retilíneo.

(b) (30%) Calcule o campo magnético $\mathbf{H}_a = \mathbf{H}_a(x,\, y,\, z)$ produzido pelo segmento retilíneo da espira situado em $x = X$ e paralelo ao eixo y (tal como mostra a parte ampliada da figura).



Agora, considere os campos magnéticos obtidos por todos os trechos que formam as arestas de uma espira de número arbitrário N.

(c) (20%) Mostre que, ao longo do eixo z, $H_x(0,\, 0,\, z) = 0 = H_y(0,\, 0,\, z)$, ou seja, as componentes do campo magnético perpendiculares a z são nulas.

(d) (20%) Determine $H_z(0,\, 0,\, z)$ exatamente. Obtenha, então, $H_z(0,\, 0,\, z)$ no limite em que $N \to \infty$ e $a = 2R\,\mathrm{sen}(\pi/N)$. Compare seu resultado com o obtido no item (a).

Sugestão: Use a lei de Biot-Savart.

Dados:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\int \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2 + C^2)^{3/2}} = \frac{t}{C^2\sqrt{t^2 + C^2}} + \text{constante}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{i2\pi n}{N}\right) = 0$$

Questão 3: Equações de Maxwell

(a) (30%) A partir das equações de Maxwell, obtenha as relações entre os potenciais escalar Φ e vetor $\mathbf{A}$ e os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$.

(b) (40%) Mostre que no calibre de Lorenz, $\nabla \cdot \mathbf{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, ambos os potenciais escalar e vetor satisfazem à equação de onda,

$$\left(-\nabla^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c} \Phi \\ \mathbf{A} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \rho/\epsilon_0 \\ \mu_0 \mathbf{j} \end{array}\right\},$$

onde $\rho(\mathbf{r},\, t)$ e $\vec{j}(\mathbf{r},\, t)$ são as distribuições de carga e corrente elétricas, respectivamente

(c) (30%) Se em $t = 0$ uma fonte produz um pulso de luz em todo o plano $x = 0$, o potencial Φ satisfaz à equação diferencial

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = Q\delta(x)\delta(t), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

onde Q é a intensidade do pulso. Obtenha $\Phi(x,\, t)$ para $t > 0$, com $\Phi(x,\, t < 0) = 0$.

Dados:

$$\tilde{f}(k,\, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(kx-\omega t)}\, f(x,\, t)$$

$$f(x,\, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i(kx-\omega t)}\, \tilde{f}(k,\, \omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \zeta^2} = \lim_{\epsilon \to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - i\epsilon)^2 - \zeta^2} = \frac{i\pi\left(e^{i\zeta t} - e^{-i\zeta t}\right)}{\zeta}\left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{para } t > 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{array}\right.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{i\eta k}}{k} = \left\{\begin{array}{ll} i\pi, & \text{para } \eta > 0 \\ -i\pi, & \text{para } \eta < 0 \end{array}\right.$$

Questão 4: Ondas Eletromagnéticas

Considere um condutor isotrópico e não magnético, de condutividade σ e permissividade ε. Suponha que σ e ε são constantes.

(a) (30%) A partir das equações de Maxwell, mostre que os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ nesse meio são soluções das equações

$$\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \nabla^2\mathbf{E},$$
$$\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla^2\mathbf{B}.$$

Considere agora uma onda eletromagnética que se propaga no espaço livre e incide normalmente sobre uma superfície plana de um meio condutor como o descrito acima, semi-infinito, situado em $z > 0$. Ao penetrar nesse meio, os campos elétrico e magnético são da forma

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 \exp\Big[i(\tilde{k}z - \omega t)\Big],$$
$$\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B}_0 \exp\Big[i(\tilde{k}z - \omega t)\Big],$$

onde ω é a frequência e $\tilde{k}$ é um número de onda complexo. Ou seja, $\tilde{k} = k + i\eta$, onde $k = \mathrm{Re}[\tilde{k}]$ e $\eta = \mathrm{Im}[\tilde{k}]$.

(b) (40%) Mostre que esta onda tem uma relação de dispersão dada por

$$\omega(k) = \frac{k^2}{\sqrt{\mu_0\varepsilon\left(k^2 + \dfrac{\mu_0\sigma^2}{4\varepsilon}\right)}}.$$

(c) (30%) Mostre que o comprimento de penetração (*skin depth*), definido por $d = 1/\eta$, é dado por:

$$d = \frac{1}{\omega\sqrt{\dfrac{\mu_0\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1\right]}}.$$

Analise o comprimento de penetração para os limites $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$.

Dados:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho,$$
$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla\times\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}).$$